*Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament.* Barcelona, SCHCT-IEC
Grapí Vilumara, P.; Massa Esteve, M. R. (ed.) (2017) p. 63-70
DOI: 10.2436/10.2006.03.9

# 'GANITA' I 'KUTTAKA', CÀLCUL EN LA MATEMÀTICA ÍNDIA DEL PERÍODE CLÀSSIC (400-1200)

**IOLANDA GUEVARA CASANOVA;[1] CARLES PUIG-PLA[2]**
[1] DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT I UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA.
[2] CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA. UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *Siddhantes, Aryabhata, Brahmagupta, 'Ganita', 'Kuttaka'*

## 'Ganita' & 'Kuttaka', Calculation in Indian Mathematics of the Classical Period (400-1200)

Summary: *During the 4th and 5th centuries, a remarkable mathematical activity took place in India based on the needs of astronomy produced by siddhantas. While continuing this tradition, two Indian astronomers and mathematicians, Aryabhata (476-550) and Brahmagupta (598-668), wrote their siddhantic texts, Aryabhatiya and Brahma-sputa-siddhanta. In this communication, some of the issues related to the calculation of the works of Aryabhata and Brahmagupta that can be studied for high school students are exposed to allow them to establish bridges between current methods of resolution and the ancient Indian methods (inversion method and kuttaka or sprayer) contributing in this way to the development of the competences of the mathematical field in particular the competences related to the dimension of connections and those of communication and representation.*

Key words: *Siddhantas, Aryabhata, Brahmagupta, 'Ganita', 'Kuttaka'.*

## La matemàtica dels 'siddhantes'

Durant els segles IV i V es va produir a l'Índia una notable activitat matemàtica a partir de les necessitats de l'astronomia. Els astrònoms escrivien textos amb instruccions per a calcular posicions dels cossos celestes i resoldre qüestions relacionades amb el calendari, la geografia o l'astrologia (Joseph, 1996: 360).

Aquests tractats d'astronomia matemàtica s'anomenaven *siddhantes* i recollien els coneixements matemàtics de l'època amb relació a tres aspectes. La matemàtica requerida per a l'astronomia predictiva, això és, per a calcular el temps, les localitzacions i les aparences de fenòmens celestes –passats o futurs– tal com s'observen des d'un lloc determinat de la Terra. La requerida per a l'astronomia computacional, és a dir, els procediments dels càlculs astronòmics en termes de la geometria dels models esfèrics, en una secció o capítol propi anomenat *gola* (esfera). I un darrer bloc, d'instrucció en el coneixement matemàtic general consistent en regles per a dur a terme les operacions aritmètiques bàsiques (*ganita* o càlcul) i també procediments per a calcular interessos sobre préstecs, o bé regles per a calcular àrees, volums o sumes de sèries (Plofker, 2009: 67-68).

Dos astrònoms i matemàtics indis, Aryabhata (476-550) i Brahmagupta (598-668), van escriure els seus textos siddhantics, l'*Aryabhatiya* i el *Brahma-sputa-siddhanta*, que van ser referents per als astrònoms i matemàtics posteriors. De fet, a la matemàtica índia, l'*Aryabhatiya* va tenir, en certa manera, el paper dels *Elements* d'Euclides a la matemàtica grega (Moreno, 2011: 46).

Les diferents escoles d'astronomia establien una estructura comuna per als textos *siddhantes* que seguien els seus autors. Totes incloïen en algun lloc de l'obra alguns capítols dedicats exclusivament al càlcul en sentit pròpiament matemàtic (Plofker, 2009: 72). Per exemple, en el cas del *Brahma-sputa-siddhanta*, que té 20 capítols, el capítol 12 es dedica al càlcul amb nombres (*ganita*) (Plofker: 2009, 140-149) i el capítol 18, al càlcul amb incògnites, i en particular al mètode de *kuttaka* o «polvoritzador» per a resoldre equacions indeterminades, això és amb més incògnites que equacions (Plofker: 2009, 149-157).

### Aritmètica o 'ganita'

L'*Aryabhatiya* (499) d'Aryabhata és el *siddhanta* més antic que es conserva. En aquest cas, el capítol dedicat a *ganita* o càlcul és el segon, format per 33 versos en una mètrica sànscrita nomenada *arya*. Un segle i mig després, Bhaskara I (629) escriu l'*Aryabhatiyabhasya*, un comentari en prosa sànscrita de l'*Aryabhatiya* (Keller, 2005: 279-280).

El primer vers és una salutació; el segon, una defensa de la notació posicional, i els versos següents fins al desè inclouen procediments geomètrics i aritmètics, càlcul d'àrees i volum i mètodes per extraure arrels quadrades i cúbiques. En el càlcul de l'àrea del cercle inclou dues aproximacions del nombre $\pi$: $\pi = \sqrt{10}$ i $\pi = 62832/20000$.

Els versos de l'11 al 17 contenen càlculs de mitges cordes (el que després evolucionarà i donarà lloc al sinus) (Puig-Pla *et al*., 2011: 53), relacions entre ombres (el que avui serien problemes pràctics de trigonometria elemental) i altres temes relacionats amb la trigonometria bàsica. El versos 18 i 19 corresponen a la suma de nombres naturals de quadrats i de cubs. Del 20 al 25, càlculs d'interessos produïts per un capital. I, finalment, del 26 al 33, mètodes de resolució d'equacions de primer grau i quadràtiques i indeterminades de primer grau (Plofker, 2009: 122-136).

L'any 628 Brahmagupta escriu *Brahma-sphuta-siddhanta* (*La doctrina de Brahma correctament establerta* o *El sistema millorat de Brahma*), un tractat d'astronomia matemàtica. En cert sentit és una rèplica a l'obra *Aryabhatiya* d'Aryabhata. Bastants anys després escriu el *Khanda-khadyaka*, als 67 anys, un *karana* o manual d'astronomia matemàtica. A diferència dels *siddhantes*, que es consideraven tractats molt complets d'astronomia, els *karana* eren textos més curts i simplificats. Es caracteritzaven per fer els càlculs astronòmics no a partir de l'any zero, en què cada escola situava l'origen del món, sinó en referència a algun any corresponent a la vida de l'autor del manual. Això simplificava força els càlculs a l'hora de fer prediccions les astronòmiques (previsió d'un eclipsi) o astrològiques més comunes i quotidianes (determinar el millor dia per a contraure matrimoni) (Plofker, 2009: 105).

La distribució dels temes dins del *Brahma-sphuṭa-siddhanta* és diferent de la que havia utilitzat Aryabhata però també conté un capítol dedicat a *ganita* o càlcul. Brahmagupta dedica els 10 primers capítols als temes bàsics d’astronomia: longituds mitjanes dels planetes; longituds verdaderes dels planetes; els problemes de la rotació diürna; eclipses lunars; eclipses solars; sortides i postes del Sol; les fases de la Lluna; l’ombra de la Lluna; les conjuncions dels planetes entre si, i conjuncions dels planetes amb les estrelles fixes. El capítol 11 el dedica a la crítica de l’*Aryabhatiya*. El 12, a l’aritmètica o *ganita.* Del 13 al 17, a d’altres temes relacionats amb astronomia que necessitaran el càlcul amb incògnites que desenvoluparà en el capítol 18. L’obra finalitza al capítol 21 amb la construcció d’una taula de sinus.

El capítol 12, aritmètica o *ganita,* conté 66 versos de càlcul amb nombres (Plofker, 2007: 421-428; Plofker, 2009: 140-149). En el primer vers, a l’estil de l’època i també com havia fet Aryabhata, inclou una salutació: «Qui coneix per separat les vint operacions començant per la suma, i els vuit procediments acabant amb les ombres, és un matemàtic».

Les vint operacions que van apareixent al llarg del text són la suma i la resta (1-2); la multiplicació i la divisió (3-4); elevar al quadrat i fer l’arrel quadrada (5-6); elevar al cub i fer l’arrel cúbica (7-8); reduir fraccions per cinc mètodes diferents (9-13); la regla de tres i la regla de tres inversa (14-15); quatre regles amb proporcions, de la regla de cinc a la regla d’onze (16-19), i mescles o intercanvis (20).

En el vers 7 el procediment d’elevar al cub el descriu així: «S’estableix el cub de l’últim dígit,[1] el quadrat de l’últim dígit multiplicat per tres i pel dígit anterior, i el quadrat del dígit anterior multiplicat per l’últim dígit i per 3, i el cub del dígit anterior. Després se sumen aquestes quantitats i s’obté el cub». En el cas del cub de 74, seria:

| Les operacions | | | | | | | | Les instruccions del vers 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 3 | | | | = | $7^3$ | S’estableix el cub de l’últim dígit |
| | 5 | 8 | 8 | | | = | $3 \cdot 4 \cdot 7^2$ | el quadrat de l’últim dígit multiplicat per tres i pel dígit anterior |
| | | 3 | 3 | 6 | | = | $3 \cdot 7 \cdot 4^2$ | i el quadrat del dígit anterior multiplicat pel darrer dígit i per 3 |
| | | | | 6 | 4 | = | $4^3$ | i el cub del dígit anterior. |
| 4 | 0 | 5 | 2 | 2 | 4 | = | $(74)^3$ | Després se sumen aquestes quantitats i s’obté el cub. |

Que és el desenvolupament de $(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$ per al cas concret de $(7 \cdot 10 + 4)^3 = 7^3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 7^2 \cdot 10^2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 4^2 + 4^3$. Cal apreciar que aquest desenvolupament és fruit de la notació posicional i de treballar en base 10 (Guevara & Puig, 2017: 67).

Pel que fa als vuit procediments descrits en el primer vers són els següents: mixtures o anàlisi de combinacions de quantitats (1), sèries (2), figures (geometria) (3), excavacions o volums (4), piles o

1. Els indis van preferir a l’inici escriure els nombres amb les unitats d’ordre menor a l’esquerra i procedien, en fer operacions (suma, multiplicació...) d’esquerra a dreta.

càlculs d'objectes apilats (5), serrar o càlculs relatius a la fusta (6), munts o càlculs relatius a monticles de grans (7), ombres de gnòmons (8) (Plofker, 2009: 140-149).

### 'Kuttaka' o «polvoritzador»

Des de l'antiguitat, els matemàtics indis i xinesos tenien especial interès per a trobar solucions enteres a les equacions diofàntiques que tenen la forma $ax + by = c$ (la solució de la qual es coneix generalment com el teorema del residu xinès). En general una equació diofàntica és una equació amb coeficients enters de dues o més incògnites, de la qual es busquen solucions enteres.

Aryabhata formula per primera vegada un procediment per a resoldre una equació indeterminada, és a dir amb més incògnites que equacions, el que es coneix com a mètode de *kuttaka* o polvoritzador.

En el comentari de Bhaskara sobre l'*Aryabhatiya* apareix el problema següent: «Trobar el nombre que dona 5 com a residu quan es divideix per 8; 4 com a residu quan es divideix per 9, i 1 com a residu quan és divideix per 7».

Es tracta, doncs, de trobar $N$, que compleix:

$$N = 8x + 5 = 9y + 4 = 7z + 1$$

Aquesta expressió, en nomenclatura actual (és a dir, en termes d'aritmètica modular), equivaldria a dir:

$$N = 5\ (mod\ 8) = 4\ (mod\ 9) = 1\ (mod\ 7)$$

Resulta que el valor més petit per a $N$ és 85. En general, les equacions diofàntiques poden ser notablement difícils. El mètode de Aryabhata per a resoldre aquest tipus de problemes es coneix com el mètode de *kuttaka*. *Kuttaka* és una paraula que procedeix de *kutt* («moldre, triturar o polvoritzar») i significa «polvoritzar» o «trencar en trossets»; el mètode involucra un algorisme recursiu per a escriure els factors originals en nombres més petits, i es va convertir en el mètode estàndard per a resoldre les equacions diofàntiques de primer ordre en la matemàtica índia. En l'actualitat, aquest algorisme, elaborat per Bhaskara al segle VII, és el mètode estàndard per a resoldre equacions diofàntiques de primer ordre i de vegades s'anomena «l'algorisme d'Aryabhata» (Guevara & Puig, 2017: 53-54).

També Brahmagupta en el *Brahma-sphuṭa-siddhanta* tracta aquest tema. En el capítol 18, dedicat al càlcul amb incògnites, exposa diferents mètodes per a resoldre equacions i sistemes de primer i de segon grau, determinats i indeterminats (Plofker, 2007: 421-428; Plofker, 2009: 149-157). Així, en els primers versos del capítol diu: «Un mestre [*acarya*] entre els que coneixen els tractats es caracteritza per conèixer el polvoritzador, el zero, les [quantitats] positives i negatives, incògnites, eliminació del [terme] mitjà, [solució de l'equació de segon grau], color-únic, [equacions amb una sola incògnita], producte d'incògnites, així com la naturalesa quadràtica [problemes amb equacions indeterminades de segon grau]».

Després de fer les anteriors recomanacions generals, introdueix el que potser és un dels aspectes més rellevants per innovador de l'obra de Brahmagupta, l'aritmètica dels nombres positius, negatius i el zero. Convé aclarir que Brahmagupta parla de «béns» (*dhana*), de «deutes» (*rina*) i del «no-res» (*kham*) però que si traduïm «béns» «deutes» i «no-res» per «nombre positiu», «nombre negatiu» i «zero» podem concloure que els matemàtics indis coneixien en aquesta època la famosa «regla dels signes» (Ifrah, 1997: 989).

Caldrà esperar uns quants segles perquè aquestes regles de càlcul que avui ens semblen tan quotidianes arribin a la matemàtica occidental, a través del *Liber Abaci* (1202) de Leonard de Pisa (Fibonacci) (Guevara & Puig, 2017: 148).

Els versos del 43 al 59 es refereixen a tècniques i exemples per a resoldre equacions amb una incògnita, tant de primer com de segon grau.

En el cas de les de segon grau, quan un múltiple $b$ de la incògnita sumat amb un múltiple $a$ del quadrat de la incògnita és igual a un nombre $c$:

$$ax^2 + bx = c$$

L'algorisme de càlcul es dirigeix a «eliminar el terme del mig», és a dir, el terme en $x$, i poder acabar el procediment fent una arrel quadrada. En notació actual seria (Guevara & Puig, 2017: 76):

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + \frac{bx}{a} = \frac{c}{a}$$

$$x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac + b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{4ac + b^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{4ac + b^2}}{2a}$$

Si ens centrem en el mètode anunciat del polvoritzador o *kuttaka*, el procediment consisteix a fer una sèrie de passos successius per transformar una equació amb més d'una incògnita en una altra de més simple i resoluble amb més facilitat. Així, per exemple, i en la nostra notació, donada una equació amb dues incògnites —$x$, $y$—, $ax + c = by$, en la qual $a$ i $b$ no tenen divisors comuns, mitjançant un canvi de variable, es transforma l'equació inicial en una altra d'equivalent, fins a aconseguir una equació que tingui un dels coeficients igual a 1. A partir d'aquí es reconstrueixen les solucions i les equacions intermèdies fins a arribar a l'equació inicial.

Per començar es divideix el més gran dels coeficients (suposem que sigui $a$) pel més petit ($b$) de l'equació inicial $ax + c = by$, així es té un quocient $q$ i un residu $r$ tals que: $a = bq + r$; a partir d'aquí es fa el canvi $y = qx + u$ i se substitueix a l'equació inicial $(bq + r)\,x + c = b(qx + u)$.

Eliminant els termes iguals a les dues bandes de l'equació s'obté l'equació $rx + c = bu$, i com que $r < b < a$, la nova equació és més senzilla que la inicial. El procés es repeteix fins que uns dels coeficients és igual a 1.

Desenvolupem un exemple:

$$29x + 4 = 8y \ (1),$$

si dividim el coeficient més gran entre el més petit obtenim: $29 = 8 \cdot 3 + 5$, aleshores pertoca fer el canvi $y = 3x + u$, que porta a l'equació $(8 \cdot 3 + 5)x + 4 = 8\,(3x + u)$, i simplificada a:

$$5x + 4 = 8u \ (2).$$

Es comença de nou el procés. Es divideix el coeficient més gran pel més petit i s'obté: $8 = 5 \cdot 1 + 3$, i es fa el canvi $x = u + v$, que porta a l'equació $5(u + v) + 4 = 8u$, i simplificada a:

$$5v + 4 = 3u \ (3).$$

Per tercera vegada es repeteix el procés: $5 = 3 \cdot 1 + 2$, el canvi ara és $u = v + w$, i la nova equació $(3 \cdot 1 + 2)v + 4 = 3(v + w)$, que simplificada és la quarta equació:

$$2v + 4 = 3w \ (4).$$

Per quarta vegada es repeteix el procés: $3 = 2 \cdot 1 + 1$, el canvi ara és $v = w + t$, i la cinquena equació:

$$2t + 4 = w \ (5).$$

S'ha arribat a la fi del procés perquè s'ha aconseguit que el coeficient d'una de les incògnites sigui 1.

Llavors, es dona a l'altra incògnita un cert valor i es refà el camí en sentit contrari, això és: si $t = 0$, aleshores,

$w = 4$, segons la cinquena equació (5)
$v = 4$, segons la quarta equació (4)
$u = 8$, segons la tercera equació (3)
$x = 12$, segons la segona equació (2)
$y = 44$, segons l'equació inicial (1)

Si es necessita la solució més petita possible, es divideix 12 per 8 (el coeficient de la $y$) i 44 per 29 (el coeficient de la $x$), divisions que donen els residus 4 i 15, respectivament. És a dir:

$$12 = 8 \cdot 1 + 4$$
$$44 = 29 \cdot 1 + 15$$

Aquests residus, 4 i 15, són la solució buscada. Així, un cop es té una solució particular, és fàcil comprovar que les altres provenen de les relacions següents:

$x = 8m + 4$ y $= 29$m + 15 (Nolla, 2006; Moreno, 2011: 47-50).

## Consideracions finals

En els darrers versos del capítol 18 Brahmagupta destaca la importància de dominar tots aquests tipus de càlculs: «Amb el que aquí s’ha explicat, un matemàtic podrà resoldre qüestions plantejades en altres treballs. En les assemblees de la gent podrà destruir la lluentor d’altres astrònoms com el Sol destrueix la lluentor d’altres estels.»

Al segle XXI, les motivacions dels matemàtics i dels seus alumnes poden ser ben bé unes altres, però saber d’on venen els coneixements matemàtics actuals, quines persones i en quin lloc els van desenvolupar, forma part del bagatge cultural que es fomenta dins d’una educació matemàtica entesa en sentit més ampli.

Així, treballar a l’aula algunes qüestions del càlcul de les obres d’Aryabhata (*Aryabhatiya*) i Brahmagupta (*Brahma-sputa-siddhanta*) amb els alumnes de secundària o d’universitat pot fer establir ponts entre els mètodes de resolució actuals i els antics mètodes indis (mètode d’inversió i *kuttaka* o polvoritzador).

En aquest sentit es fomenta el desenvolupament de diverses competències de l’àmbit matemàtic, les referides a la dimensió de connexions i les de comunicació i representació, així com les de l’àmbit digital si es compaginen les resolucions manuals amb les que poden oferir diferents programes, com ara GeoGebra o Matlab.

## Referències bibliogràfiques

GUEVARA, I.; PUIG, C. (2017), *Brahmagupta. El àlgebra de las estrelles*, Barcelona, RBA.

IFRAH, G. (1997), *Historia universal de las cifras*, Madrid, Espasa-Calpe.

JOSEPH, G. G. (1996), *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Madrid, Editorial Pirámide.

KELLER, A. (2005), «Making diagrams speak, in Bhaskara I's commentary on the *Aryabhatiya*», *Historia Mathematica*, 32, 275-302.

MORENO, R. (2011), *Aryabhata, Brahmagupta y Bhaskara. Tres matemáticos de la India,* Madrid, Nivola.

NOLLA, R. (2006), *Estudis i activitats sobre problemes clau de la història de la matemàtica*, Barcelona, Publicacions de la SCM, IEC.

PLOFKER, K. (2007), «Mathematics in India». A: KATZ, V. (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook*, Princeton and Oxford, Princeton University Press, 385-514.

PLOFKER, K. (2009), *Mathematics in India*, Princeton and Oxford, Princeton University Press.

PUIG-PLA, C.; GUEVARA, I.; ROMERO, F.; MASSA, M. R. (2011), «La trigonometria a la matemàtica de l'Antiga Índia. Algunes idees per treballar a l'aula». A: GRAPÍ, P.; MASSA, M. R. (ed.), *Actes de la VI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintana Marí»*, Barcelona, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica - Institut d'Estudis Catalans, 53-60.